Algebry operatorów w przestrzeniach Hilberta
Lista 1 (różne rodzaje topologii)

Zad 1. Niech X będzie zbiorem, Y przestrzenią topologiczną oraz $\mathcal{F}$ pewną rodziną odwzorowań z X w Y. Uzasadnić, że istnieje najsłabsza topologia na X, przy której wszystkie $f \in \mathcal{F}$ są ciągłe.

a) Jak "wyglądają" bazy otoczeń w tej topologii?

b) Co to za topologia jeśli $\mathcal{F}$ składa się z odwzorowań stałych?

c) Co to za topologia przy założeniu, że Y jest przestrzenią Hausdorffa i $\mathcal{F} = Y^X$?

d) Uzasadnić, że X wraz z tą topologią jest przestrzenią Hausdorffa, przy założeniu, że Y jest przestrzenią Hausdorffa i $\mathcal{F}$ rozdziela punkty X, tj.: jeśli $p \neq q$ są punktami X, to $f(p) \neq f(q)$ dla pewnego $f \in \mathcal{F}$?

e) Co to za topologia, jeżeli $X = Y \times Y \times Y \times ...$ oraz $\mathcal{F}$ składa się z rzutów $p_n(y_1, y_2, ...) = y_n$, $n = 1, 2, 3, ...$?

Zad 2. Niech X będzie przestrzenią zwartą w topologii τ. Pokazać, że

a) nie istnieje topologia Hausdorffa istotnie słabsza niż τ,

b) jeżeli pewien ciąg funkcji ciągłych na X rozdziela punkty X, to τ jest metryzowalna.

Zad 3. Na przestrzeni Hilberta H najsłabszą topologię, przy której odwzorowania $H \ni x \to (y|x) \in \mathbb{C}$, $y \in H$, są ciągłe nazywamy *słabą topologią* na H, a zbiory otwarte w tej topologii nazywamy zbiorami *słabo otwartymi.*

a) Uzasadnić, że ciąg wektorów $\{x_n\}$ *zbiega do wektora x słabo*, tzn. w słabej topologii, wtedy i tylko wtedy, gdy $(y|x_n) \to (y|x)$ dla każdego $y \in H$.

b) Pokazać, że jeżeli ciąg $\{x_n\}$ zbiega do x w normie, to zbiega również do x słabo, ale na ogół implikacja odwrotna nie zachodzi. Wyciągnąć stąd wniosek, że słaba topologia jest istotnie słabsza od topologii przestrzeni Hilberta (gdy $\dim(H) = \infty$).

c) Pokazać, że jeżeli ciąg $\{x_n\}$ zbiega do x w słabej topologii, to $\{x_n\}$ zbiega do x w normie wtedy i tylko wtedy, gdy $\|x_n\| \to \|x\|$.

d) Uzasadnić, że w przypadku gdy $\dim(H) = \infty$, każdy niepusty zbiór słabo otwarty jest nieograniczony. W szczególności kula otwarta nie jest zbiorem słabo otwartym.

e) Wykazać, że kula domknięta w przestrzeni Hilberta jest zbiorem słabo zwartym.

f) Udowodnić, że w przypadku gdy $\dim(H) = \infty$, topologia słaba nie jest metryzowalna

g) Wykazać, że w ośrodkowej przestrzeni Hilberta topologia słaba jest metryzowalna na zbiorach ograniczonych.

h) Udowodnić, że każdy ciąg Cauchy w słabej topologii jest słabo zbieżny.

Zad 4. Niech $B(H)$ będzie algebrą operatorów ograniczonych na nieskończenie-wielowymiarowej przestrzeni Hilberta H.

a) Pokazać, że ciąg operatorów $\{a_n\}$ *zbiega do operatora a silnie*, tzn. w silnej topologii operatorowej S, wtedy i tylko wtedy, gdy $a_n x \to ax$ dla każdego $x \in H$.

b) Pokazać, że ciąg operatorów $\{a_n\}$ *zbiega do operatora a słabo*, tzn. w słabej topologii operatorowej W, wtedy i tylko wtedy, gdy $(y|a_n x) \to (y|ax)$ dla każdych $x, y \in H$.

c) Uzasadnić, że $W \subset S \subset N$, czyli topologia słaba jest słabsza niż topologia mocna, która z kolei jest słabsza niż topologia zadana przez normę operatorową.

d) Wykazać, że norma operatorowa $\| \cdot \|$ jest ciągła w topologii N, ale nie jest ciągła w obu topologiach W, S.

e) Wykazać, że operacja sprzężenia * jest ciągła w topologii N oraz W, ale nie jest ciągła w topologii S.

f) Wykazać, że mnożenie operatorów jest działaniem ciągłym w topologii N, ale nie jest ciągłe w obu topologiach W, S (w W nie jest ciągowo ciągłe).

g) Wykazać, że mnożenie operatorów jest działaniem ciągłym we wszystkich topologiach N, W, S, jeżeli jeden z czynników jest ustalony.

Zad 5. Niech $\{a_n\} \subset B(H)$ będzie ograniczonym, niemalejącym ciągiem operatorów samosprzężonych. Pokazać, że

a) Na ogół ciąg $\{a_n\}$ nie zbiega w topologii N.

b) Ciąg $\{a_n\}$ zbiega w topologii W.

c) Ciąg $\{a_n\}$ zbiega w topologii S.

Zad 6. Niech $\mathcal{M} \subset B(H)$ będzie algebrą von Neumanna i niech P i Q będą rzutami ortogonalnymi na podprzestrzenie K, $L \subset H$. Udowodnić, że rzut $P \wedge Q$ na podprzestrzeń $K \cap L$ oraz rzut $P \vee Q$ na podprzestrzeń rozpiętą przez $P \cup Q$ należą do $\mathcal{M}$.

Literatura:

1. W. Rudin "Analiza Funkcjonalna", PWN 2001 str. 74-76 (zadania 1,2)
2. P. Halmos "A Hilbert space problem book" chapters 3, 13, 14 (pozostałe zadania)